Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 8

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 19. Dezember 2019, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 8.1 *(4 Punkte)*

Ein *Polynom* über einem Körper K in der Unbestimmten X ist von der Gestalt $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$, wobei $a_i \in K$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und nur endlich viele a_i von Null verschieden sind. Zwei Polynome $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ sind genau dann gleich, wenn $a_i = b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Ist $a_n \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_m = 0$ für alle $m > n$, so schreiben wir auch $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ und sagen, dass f von *Grad* n ist (Kurzschreibweise: $\deg(f) = n$). Die Menge aller Polynome über K in der Unbestimmten X bezeichnen wir mit $K[X]$. Wir versehen $K[X]$ mit der Addition

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i := \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) := \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda a_i) X^i \quad (\lambda \in K)$$

Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass $K[X]$ mit diesen Operationen ein K-Vektorraum ist.

Sei nun K ein Körper und $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Im Folgenden bezeichnet $K[X]_{\leq d}$ die Menge aller Polynome über K in der Unbestimmten X von Grad kleiner oder gleich d und entsprechend $K[X]_{=d}$ die Menge aller Polynome über K in der Unbestimmten X von Grad gleich d.

(a) Beweisen Sie, dass $K[X]_{\leq d} \cup \{0\}$ ein Unterraum von $K[X]$ ist. Zeigen Sie hierzu, dass für alle $f, g \in K[X]_{\leq d} \cup \{0\}$ und alle $\lambda \in K$ gilt: $f - g \in K[X]_{\leq d} \cup \{0\}$ und $\lambda f \in K[X]_{\leq d} \cup \{0\}$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Unterraums $K[X]_{\leq d}$ von $K[X]$. Welche Dimension hat $K[X]$?

(c) Ist $K[X]_{=d} \cup \{0\}$ ein Unteraum von $K[X]$?

Aufgabe 8.2 *(5 Punkte)*

Es sei W der durch die Vektoren

$$\alpha_1 := (1, 2, 2, 1), \quad \alpha_2 := (0, 2, 0, 1), \quad \alpha_3 := (-2, 0, -4, 3)$$

aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Außerdem seien

$$\alpha_1' := (1, 0, 2, 0), \quad \alpha_2' := (0, 2, 0, 1), \quad \alpha_3' := (0, 0, 0, 3).$$

Wir setzen $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ und $\mathcal{B}' := \{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von W sind.

(b) Sei $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$ beliebig. Bestimmen Sie $[\beta]_{\mathcal{B}}$, d.h. die Koordinaten-Spaltenmatrix von β bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B}$.

(c) Finden Sie eine Matrix $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, so dass $[\beta]_{\mathcal{B}} = P[\beta]_{\mathcal{B}'}$.

Aufgabe 8.3 *(4 Punkte)*

Sei K ein Körper, V ein drei-dimensionaler K-Vektorraum und $\alpha, \beta, \gamma \in V$ linear unabhängig über K. Wir betrachten die **geordneten Basen**

$$\mathcal{B}_1 := \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad \mathcal{B}_2 := \{\beta, \alpha, \gamma\}, \quad \mathcal{B}_3 := \{\beta, \gamma, \alpha\}.$$

Sei nun $v \in V$ beliebig.

(a) Finden Sie eine Matrix $P \in M_{3\times 3}(K)$, so dass $[v]_{\mathcal{B}_1} = P[v]_{\mathcal{B}_2}$.

(b) Finden Sie eine Matrix $P \in M_{3\times 3}(K)$, so dass $[v]_{\mathcal{B}_1} = P[v]_{\mathcal{B}_3}$.

(c) (Freiwillig/Keine Punkte) Finden Sie weitere geordnete Basen $\mathcal{B}_i$ von V bestehend aus α, β und γ. Wie sehen die entsprechenden Matrizen P aus, so dass $[v]_{\mathcal{B}_1} = P[v]_{\mathcal{B}_i}$?

Aufgabe 8.4 *(3 Punkte)*

Wir betrachten die 5×5-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Zeilenraumes W von A.